

# ポアソン分布

もし、ボールの数 $N$ が無数あるが、カップに入るボールの数が平均値程度であるとする。この場合、一つのボールがカップに入る確率 $p$ は無数小になるが、平均値が変わらない( $Np=\mu$ )の条件のもと、 $N$ が無数大( $N\rightarrow\infty$ )の極限をとると、2項分布は、

$$\lim_{N\rightarrow\infty} P_B(n; N, p) = \lim_{N\rightarrow\infty} P_B(n; N, \mu/N) = \lim_{N\rightarrow\infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\mu}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-n}$$

スターリンの近似  $N! \xrightarrow{N\gg 1} \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$  を利用して、

$$P \xrightarrow{N\gg 1} \frac{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}}{n! \sqrt{2\pi(N-n)} (N-n)^{N-n} e^{-(N-n)}} \left(\frac{\mu}{N}\right)^n \left(\frac{N-\mu}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N$$

200107

素粒子I

1

$$P \xrightarrow{N\gg 1} \frac{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}}{n! \sqrt{2\pi(N-n)} (N-n)^{N-n} e^{-(N-n)}} \left(\frac{\mu}{N}\right)^n \left(\frac{N-\mu}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N$$

$$= \frac{\mu^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{1-(n/N)}} \frac{1}{(1-(n/N))^N} \left(\frac{1-(n/N)}{1-(\mu/N)}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N$$

ここで、定義より、 $\lim_{N\rightarrow\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$

$$\xrightarrow{N\gg n, \mu>0} \frac{\mu^n}{n! e^n} \frac{1}{\sqrt{1-(n/N)}} \frac{1}{e^{-n}} \left(\frac{1-(n/N)}{1-(\mu/N)}\right)^n e^{-\mu} \sim \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

結局:  $\lim_{N\rightarrow\infty} P_B(n; N, \mu/N) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$  ポアソン分布

200107

素粒子I

2

## Poisson Distribution

1秒間に平均 $\mu$ 回崩壊する放射性元素の実際の1秒あたりの崩壊数を測定すると $n$ 回だった。

$$P_P(n; \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

平均が $\mu$ 回の際に $n$ 回測定する確率  
nは0を含む整数,  $\mu$ は0または正の実数.

平均 $\mu=2.5$ 回の際,  $n=3$ 回測定する確率は,

$$P_P(2.5, 3) = \frac{2.5^3}{3!} e^{-2.5} = 0.214$$

平均 $\mu=2.5$ 回の際,  $n=0$ 回測定する確率は

$$P_P(2.5, 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = 0.082$$

平均 $\mu=0$ 回の際,  $n=1$ 回測定する確率は

$$P_P(0, 1) = \frac{0^1}{1!} e^{-0} = 0$$

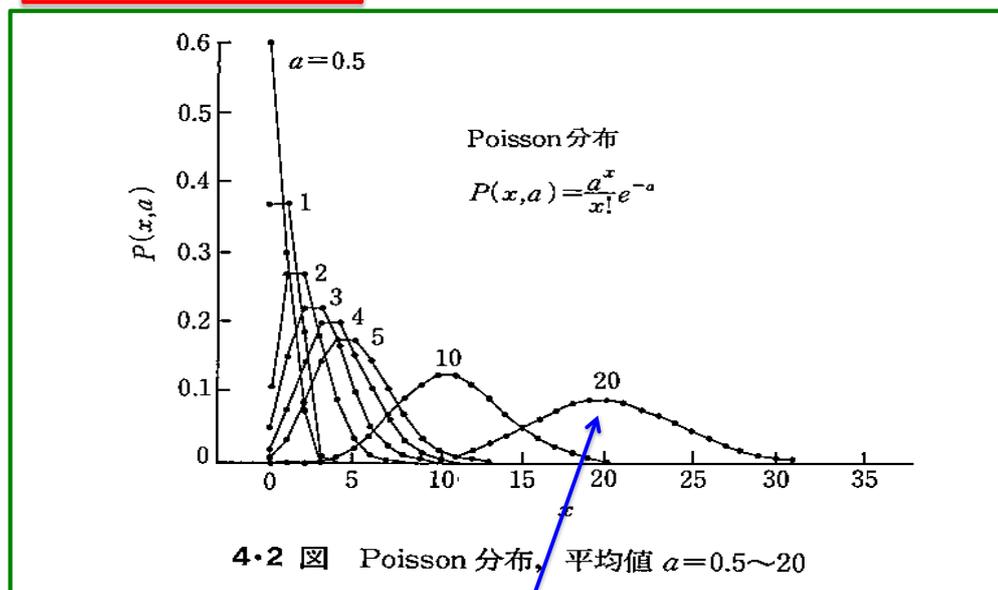
200107

3

## Poisson Distribution

$$P_P(n; \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

平均 $\mu$ 回で $n$ 回測定する確率  
小統計の際に使う



大きな $\mu$ では, ポアソン分布は,  
 $m=\mu, \sigma=\sqrt{\mu}$ , のGauss分布になる。  
素粒子

200107

4

## ポアソン分布の平均と分散

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0, \infty} n P_P(n, \mu) = \mu e^{-\mu} \sum_{n=1, \infty} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} = \mu$$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0, \infty} n^2 P_P(n, \mu) = \mu e^{-\mu} \sum_{n=1, \infty} \frac{n \mu^{n-1}}{(n-1)!} = \mu(\mu + 1)$$

$$\text{よ} \text{の} \text{で} \text{, } \sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \mu(\mu + 1) - \mu^2 = \mu$$

もし実験でnイベント観測されたらその誤差は,

$$n \pm \sigma = n \pm \sqrt{n} = n \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

(nが大きいほど, 誤差は小さくなる)

Poisson distribution becomes the Gaussian distribution  
in a limit of  $n, \mu \rightarrow \text{large}$  &  $(n-\mu)/\mu \rightarrow \text{small}$

$$P_P = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \xrightarrow{\text{Stirling's}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left( \frac{\mu}{n} \right)^n e^{n-\mu}$$

$$\delta \equiv \frac{n-\mu}{\mu}; \quad |\delta| \ll 1 \quad P_P \sim \frac{e^{\mu\delta}}{\sqrt{2\pi\mu}} (1+\delta)^{-\mu(1+\delta)}$$

Here,

$$\ln(1+\delta)^{-\mu(1+\delta)} = -\mu(1+\delta) \ln(1+\delta) \sim -\mu(1+\delta) \left( \delta - \frac{\delta^2}{2} \right) \sim -(\mu\delta + \mu\delta^2/2)$$

$$\text{Therefore, } (1+\delta)^{-\mu(1+\delta)} \sim \exp[-(\mu\delta + \mu\delta^2/2)]$$

$$P_P \rightarrow \frac{e^{\mu\delta}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp[-(\mu\delta + \mu\delta^2/2)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\mu\delta^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left[-\frac{(n-\mu)^2}{2\mu}\right]$$

← Gaussian distribution  
with mean  $\mu$  and  $\sigma^2 = \mu$

ある条件で、相互に関係している。

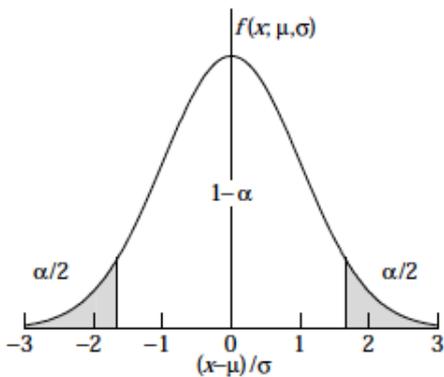
$$P_B(n; N, p) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$\mu = Np$$

$$P_P(n; \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \longleftrightarrow P_G(n, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma}\right]$$

$n, \mu \rightarrow \text{large}$   
 $(n-\mu)/\mu \rightarrow \text{small}$



**Figure 33.4:** Illustration of a symmetric 90% confidence interval (unshaded) for a measurement of a single quantity with Gaussian errors. Integrated probabilities, defined by  $\alpha$ , are as shown.

**Table 33.1:** Area of the tails  $\alpha$  outside  $\pm\delta$  from the mean of a Gaussian distribution.

$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
0.3173	$1\sigma$	0.2	$1.28\sigma$
$4.55 \times 10^{-2}$	$2\sigma$	0.1	$1.64\sigma$
$2.7 \times 10^{-3}$	$3\sigma$	0.05	$1.96\sigma$
$6.3 \times 10^{-5}$	$4\sigma$	0.01	$2.58\sigma$
$5.7 \times 10^{-7}$	$5\sigma$	0.001	$3.29\sigma$
$2.0 \times 10^{-9}$	$6\sigma$	$10^{-4}$	$3.89\sigma$

## Confidence Interval

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

The true value is within

$1\sigma$  : 68.27%

$2\sigma$  : 95.45%

$3\sigma$  : 99.73%

$4\sigma$  : 99.99%

$5\sigma$  : 99.9999%

Sometimes  $5\sigma$  is required  
in HEP

## 小統計の確度(confidence level)

もし、 $n=0$ 回測定した場合、90%の確度で平均値 $\mu$ は何( $\mu_0$ )以下と言えるか？

答え：ポアソン分布より、平均が $\mu$ の時、0回測定する確率は、

$$P_p(\mu, 0) = \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} = e^{-\mu}$$

$$\int_0^{\mu_0} P_p(\mu, 0) d\mu = 1 - e^{-\mu_0} = 0.9 \Rightarrow \mu_0 = 2.3$$

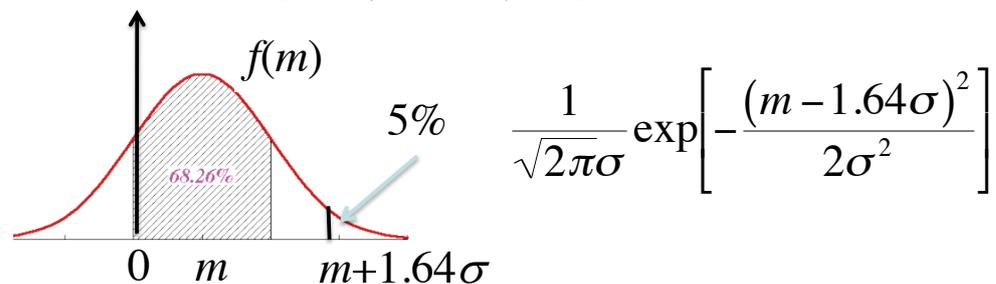
これあら90%の確度での $\mu$ の値は、 $\mu=0\sim 2.3$ .

これを"平均値は、90%の確度で2.3回以下である"と表現する.

- ➔ 反応断面積の上限値や質量測定の上限值などによく使われる.
- ➔ 0回の観測値も重要な情報

### 上限値

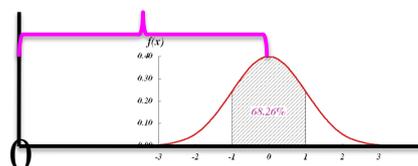
例えばニュートリノの重さを測定したら1eVだった、しかし測定誤差が2eVある場合、どう表現するか？



例：質量があるかないかは非常に重要なので、結果は慎重(=高いCL)に出す。

例：95% CLで $m+1.64\sigma$ 以下  
(=84% CLで0以上とも言える)

素粒子物理学では重要な発見に対しては $5\sigma$ の信頼性を要求されることも多い。 ➔ 実験のデザインの基準。



# Systematic Error(系統誤差)

もし定規に誤差  $\delta$  があった場合，全ての測定がこの誤差を含む

Measured value  $\rightarrow l_i = l_i^t \pm \delta$  ← True measurement

$$p(l_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{(l_1 \pm \delta - l_0)^2}{2\epsilon^2}\right), \quad p(l_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{(l_2 \pm \delta - l_0)^2}{2\epsilon^2}\right)$$

$$P(l_1, l_2) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\epsilon/\sqrt{2})} \exp\left[-\frac{(l_0 \pm \delta - (l_1 + l_2)/2)^2}{2(\epsilon/\sqrt{2})^2}\right]$$

$$l_0 = \frac{l_1 + l_2}{2} \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \pm \delta$$

系統誤差は，測定を何回やっても改善しない。

データ解析で一番面倒だが重要なことは系統誤差を正しく見積もること。

→ 決まった方法はない。グループ外の人には、分かりづらい

→ 間違いが入りやすい

200107

素粒子I

11

## 統計誤差と系統誤差の組み合わせ

論文では，測定結果は，次のように表現されている。

$$x = m \pm \sigma_{stat.} \pm \sigma_{sys.}$$

系統誤差と統計誤差は独立なので，全誤差はそれを統計的に加えたものになる。

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{stat.}^2 + \sigma_{syst.}^2}$$

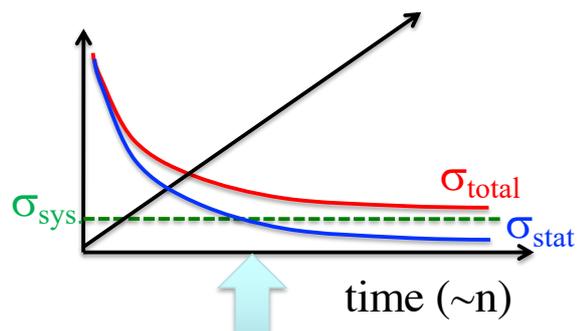
統計誤差は， $1/\sqrt{n}$ で  
小さくなるので

$$\sigma_{total} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n} + \sigma_{syst.}^2}$$

全誤差を改善は， $\sigma_{stat} < \sigma_{syst.}$   
の領域に入ると，効率が  
悪くなる。

200107

実験のコスト  
(electricity, labor, etc.)



time to consider to stop the experiment

# ニュートリノ振動

200107

素粒子I

13

## 2015年10月6日 ノーベル賞 発表



受賞理由：ニュートリノが質量を持つことを明らかにした、  
200107 素粒子I 14  
ニュートリノ振動の発見

## ノーベル賞講演(2015年12月8日)



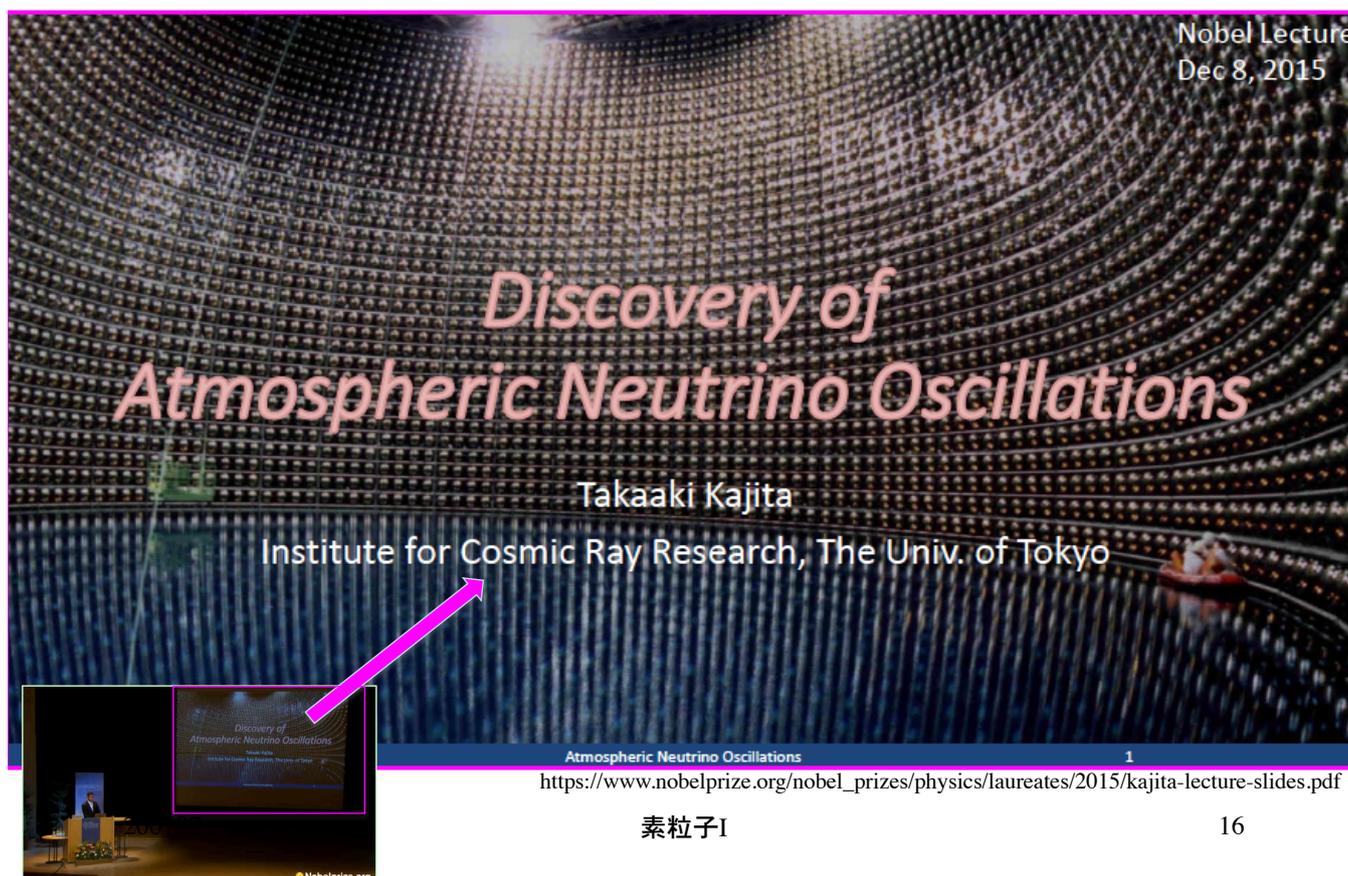
MLA style: "Takaaki Kajita - Nobel Lecture: Discovery of Atmospheric Neutrino Oscillations". *Nobelprize.org*.  
Nobel Media AB 2014. Web. 23 Jul 2016. <[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2015/kajita-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2015/kajita-lecture.html)>

200107

素粒子I

15

## 梶田先生のノーベル賞講演スライド (2015年12月8日、ストックホルム)



素粒子I

16

梶田先生のノーベル賞講演  
(2015年12月8日、ストックホルム)

梶田先生のスライド  
の日本語訳

Nobel Lecture  
Dec 8, 2015

# 大気ニュートリノ振動の発見

Takaaki Kajita

Institute for Cosmic Ray Research, The Univ. of Tokyo

Atmospheric Neutrino Oscillations

1

本講義では、梶田先生のスライドを翻訳し、解説を加える。  
200107 素粒子 17

## (ノーベル賞)講演の概要

梶田先生のスライド  
の日本語訳

- \* 導入： カミオカンデ – 物語りの始まり–
- \* 少なかった大気ニュートリノ
- \* ニュートリノ振動の発見
- \* 最近の結果と将来の展望
- \* まとめ
- \* 謝辞

Atmospheric Neutrino Oscillations

2

## Introduction: Kamiokande - the starting point -

カミオカンデ = 物語りの始まり =

Atmospheric Neutrino Oscillations

3

200107

素粒子I

19

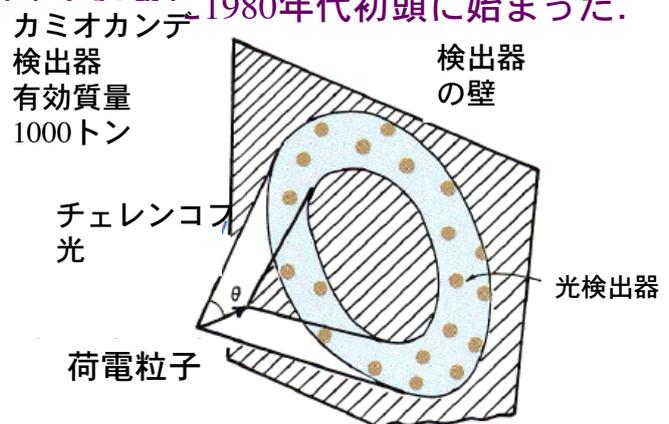
## 神岡での核子崩壊実験 (カミオカンデ実験)

- \* 1970年代の終わりに3つの相互作用を統一する大統一理論ができた。
- \* これらの理論によると、核子は、 $10^{30}$ 年くらいで壊れることが预言された。

\* カミオカンデ実験は、それを検出するために1980年代初頭に始まった。



カミオカンデ検出器



Atmospheric Neutrino Oscillations

4

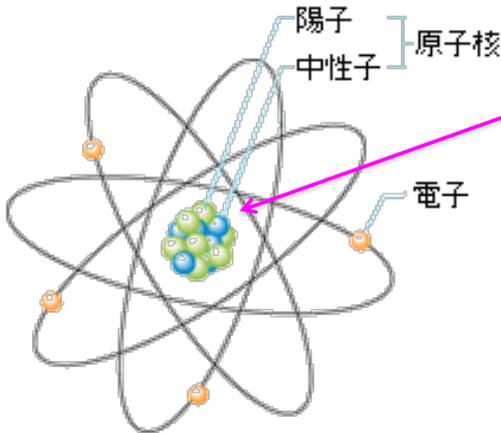
200107

素粒子I

20

## 解説：カミオカンデ実験が測定しようとした「核子の崩壊」とは？

原子の中心にある原子核は陽子と中性子からできている。陽子と中性子をまとめて「核子」と呼ぶ。



<http://livedoor.4.blogimg.jp/akariver/imgs/6/0/6049479b.gif>

大統一理論では、この中の核子が $10^{30}$ 年の寿命で崩壊することを预言する。

これを測定し、大統一理論を証明したいが $10^{30}$ 年も待つわけにはいかない。

→ 発想を逆にして、 $10^{30}$ 個の核子を集めたらその中で1年間に1個くらい崩壊するはず。

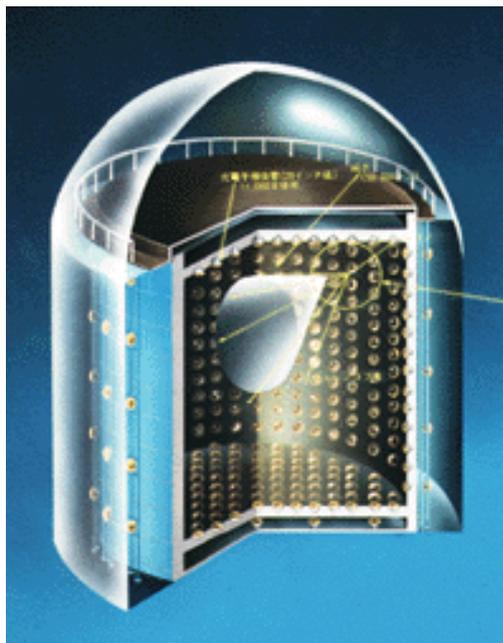
→ 千トンの水の中には $6 \times 10^{32}$ 個の核子が含まれる。1日に1個くらい崩壊するかもしれない！！

200107

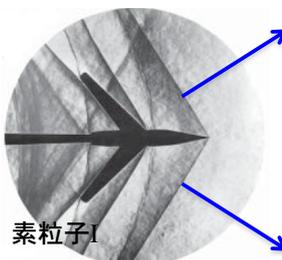
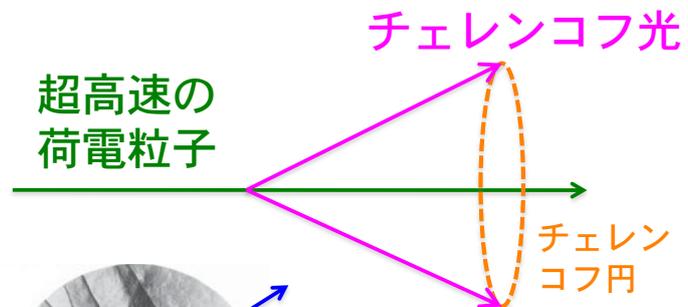
素粒子I

21

## 解説：カミオカンデ検出器



岐阜県神岡鉱山の地下に1000トンの水タンクを作り、高性能光センサー(光電子増倍管)で素粒子が発生するチェレンコフ光を検出する。



超音速のジェット機機が出す衝撃波と似た原理

200107

<http://nngroup.physics.sunysb.edu/sk/pic/sk-tank-from-hamamatsu.gif>

素粒子I

22

戸塚先生

梶田先生

小柴先生

鈴木厚人先生

(2002年ノーベル賞受賞) (東北大)

カミオカンデ建設チーム (1983年春)

梶田先生のスライド  
の日本語訳



## 核子崩壊実験からニュートリノ実験へ

1986...

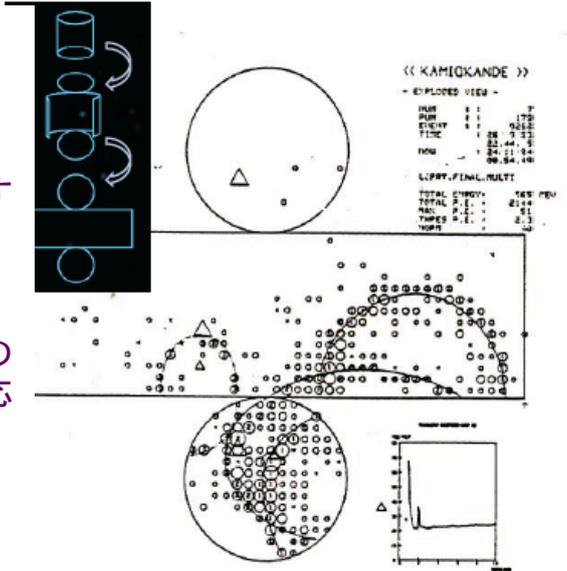
梶田先生のスライド  
の日本語訳

私は、1986年3月に陽子崩壊探索の研究で博士号を取りました。(残念ながら陽子崩壊は見つかりませんでした。)

私は、大気ニュートリノ反応と陽子崩壊を区別をする解析プログラムは十分に有効ではないと感じていたので、博士論文を書いた後、すぐに解析プログラムの改良を始めました。

その一つは、重なったチェレンコフ円から粒子の種類を特定する解析プログラムでした。その反応が電子から来たのか $\mu$ 粒子から来たのかを知りたかったのです。

この新しい解析プログラムを一番簡単なはずの一つのチェレンコフ円の反応に使ってみました。



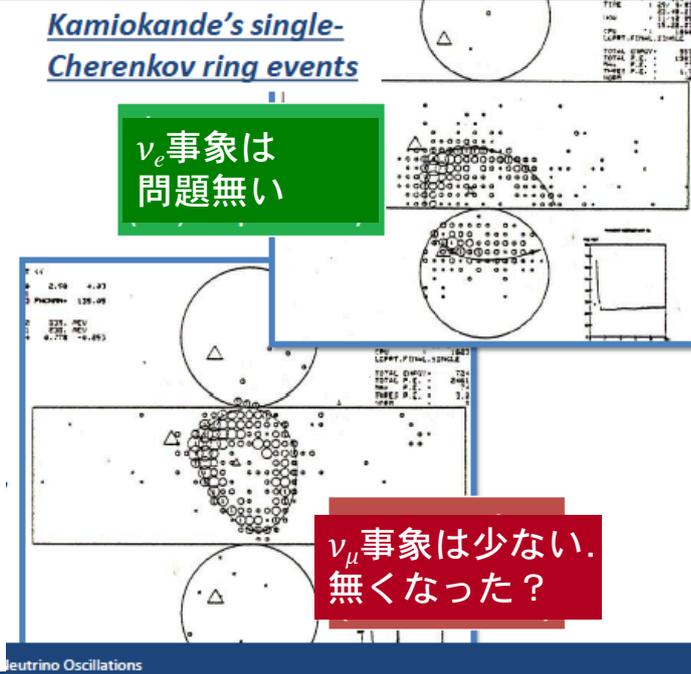
Multi-ring event observed in Kamiokande.

# 謎のミュー・ニュートリノ欠損を発見

妙な結果が.....

梶田先生のスライド  
の日本語訳

- \* 大気ニュートリノのニュートリノの種類を調べました。
- \* すると妙な結果が得られました。ミュー・ニュートリノ( $\nu_\mu$ )の数が予想より随分少なかったのです。
- \* 最初、自分は重大な間違いを犯したのではないかと思いましたが、どこで間違ったかを調べる為に実データを目で見ました。するとすぐに、私の解析プログラムは正しいことが分かりました。
- \* 私は、問題は、他の部分にあると思いました。



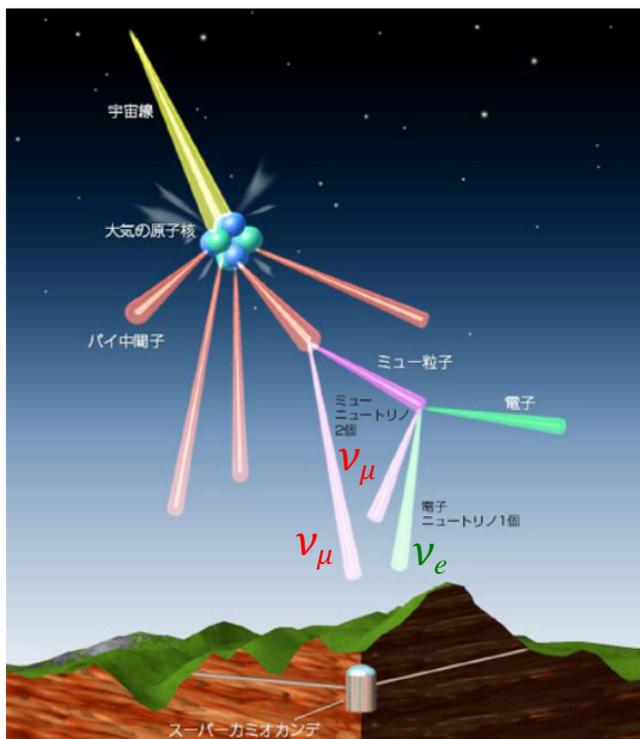
Neutrino Oscillations

200107

素粒子I

25

## 解説：大気ニュートリノ



宇宙から飛来する高エネルギーの陽子が空気（窒素など）と反してできたニュートリノ。

反応でできた $\pi$ 粒子1個あたり、 $\nu_\mu$ が2つ、 $\nu_e$ が一つできる。

元の数分からなくても、 $\nu_\mu$ と $\nu_e$ が数の比は、2で一定

200107

素粒子I

26

## $\nu_\mu$ 欠損測定の結果(1988)

梶田先生のスライド  
の日本語訳

1年以上研究を行い、 $\nu_\mu$ の欠損は、データ解析やシミュレーションの結果ではないと結論づけた。



Kamiokande

K. Hirata et al, Phys.Lett.B 205 (1988) 416.

	観測値	予想値
$\nu_e$ events	93	88.5
$\nu_\mu$ events	85 ← 少ない!!	144.0

論文に書いた結論：「我々は、ニュートリノの欠損を検出器の効果や、大気ニュートリノの絶対量の不定性で説明することはできなかった。ニュートリノ振動のように、これまで知られていない物理効果で説明できるかもしれない」個人的な思い出：私は、大きな混合角を持つニュートリノ振動の可能性に大きく興奮した。例えば、 $\nu_\mu$ は、他の種類のニュートリノに最大限に変化しているように見える。これは全く予想外であった。これが私がこの研究を続ける大きな動機となった。

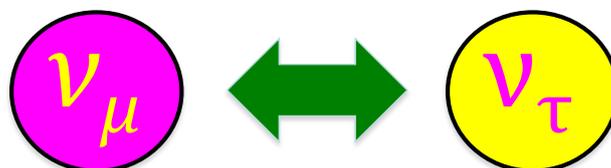
200107

素粒子I

27

解説：梶田さんたちが発見したのは  
ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は、  
ニュートリノの種類がお互いに変化する現象



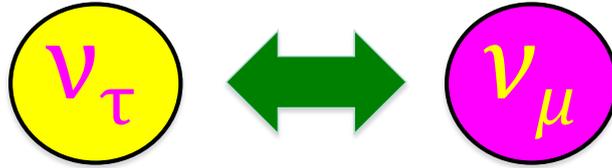
200107

素粒子I

28

# 解説：梶田さんたちが発見したのは ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は、  
ニュートリノの種類がお互いに変化する現象

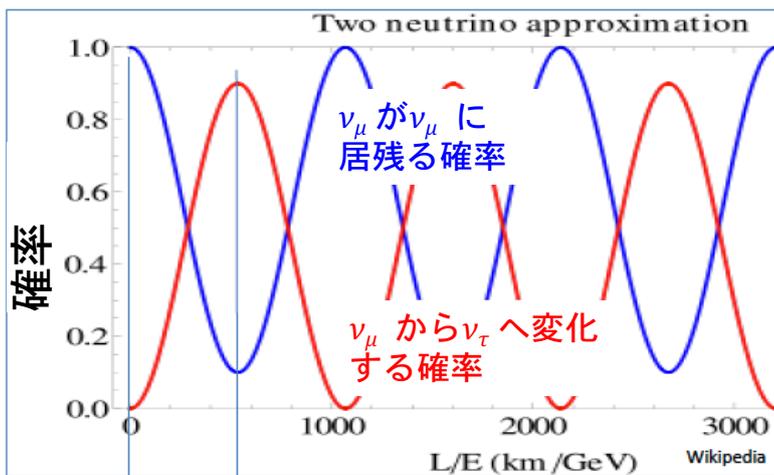


## 梶田先生の説明

### ニュートリノ振動

梶田先生のスライド  
の日本語訳

もしニュートリノが質量を持っていたら、その種類が変化する。  
例えば  $\nu_\mu$  と  $\nu_\tau$  の間に振動が起きるかもしれない。



理論的には、牧、坂田、中川、ポンテコ  
ルボ先生により予言されていた。



S. Sakata, Z. Maki, M. Nakagawa



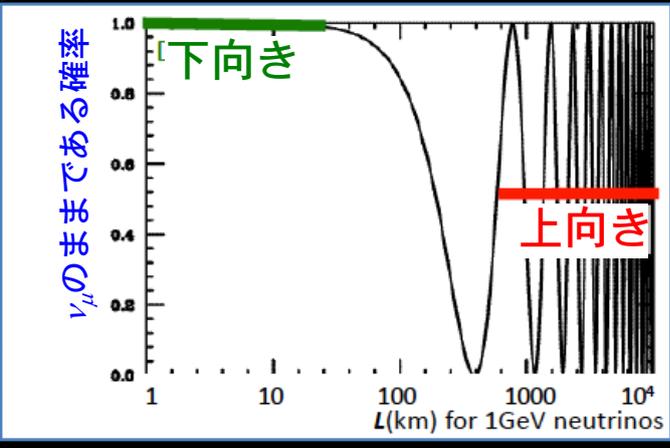
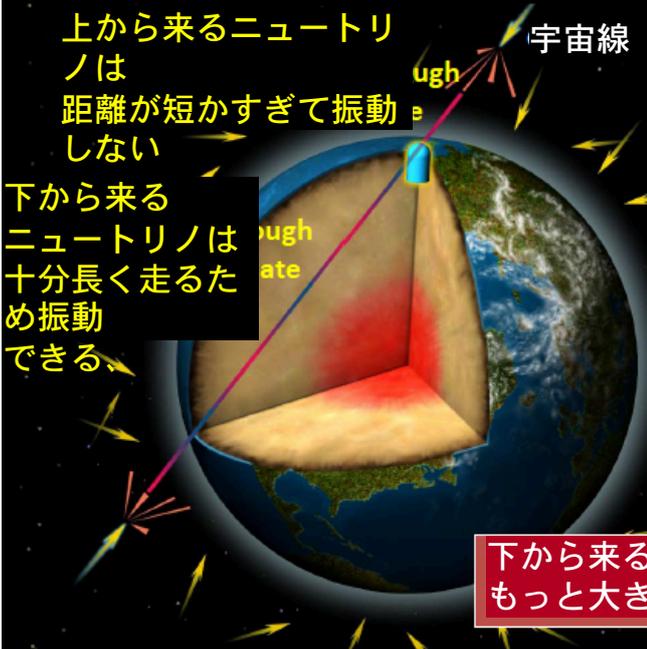
B. Pontecorvo

$L$  は、ニュートリノの飛行長さ (km)  
 $E$  は、ニュートリノエネルギー (GeV)

もしニュートリノ質量差が小さいと、振動長 ( $L/E$ ) は長くなる。

もしニュートリノ振動が $\nu_\mu$ 欠損の原因だったら何が起きるか？

梶田先生のスライドの日本語訳

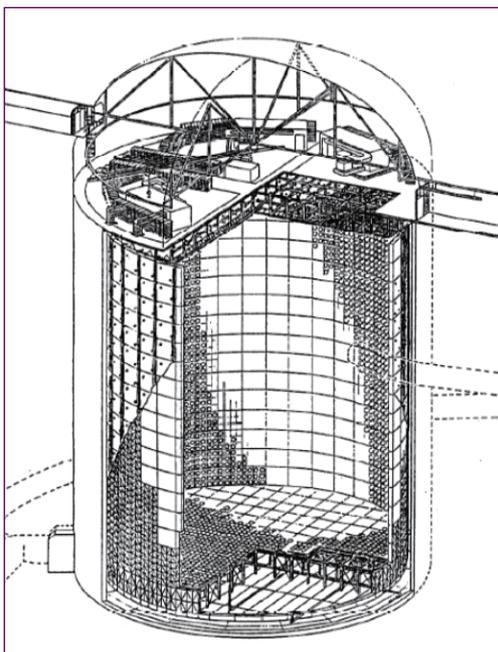


下から来る上向きの $\nu_\mu$ に欠損が見られるはず！  
もっと大きな検出器が必要 → スーパーカミオカンデへ

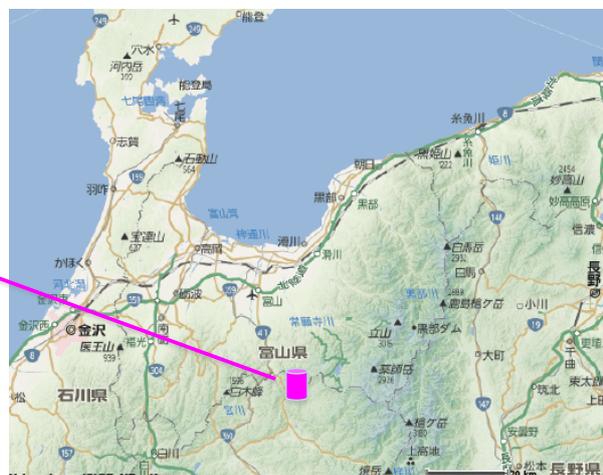
Atmospheric Neutrino Oscillations 13

解説：梶田先生たちは、ニュートリノをどうやって「見た」か？

4万トンの水タンク：スーパーカミオカンデ



岐阜県神岡町



# 梶田先生

日米の研究者によるスーパーカミオカンデグループの発

梶田先生のスライドの日本語訳



@ Institute for Cosmic Ray Research, (Probably) 1991 or 1992

Atmospheric Neutrino Oscillations

16

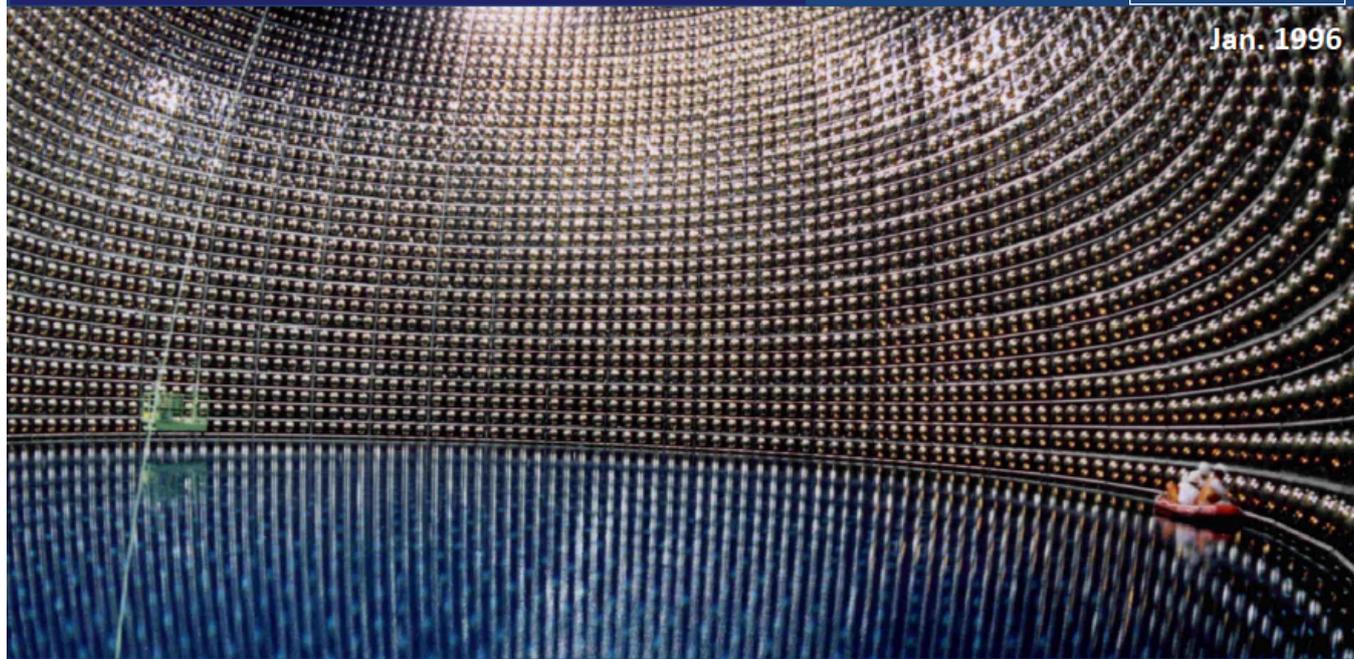
200107

素粒子I

33

スーパーカミオカンデ検出器への水入れ

梶田先生のスライドの日本語訳



Jan. 1996

Atmospheric Neutrino Oscillations

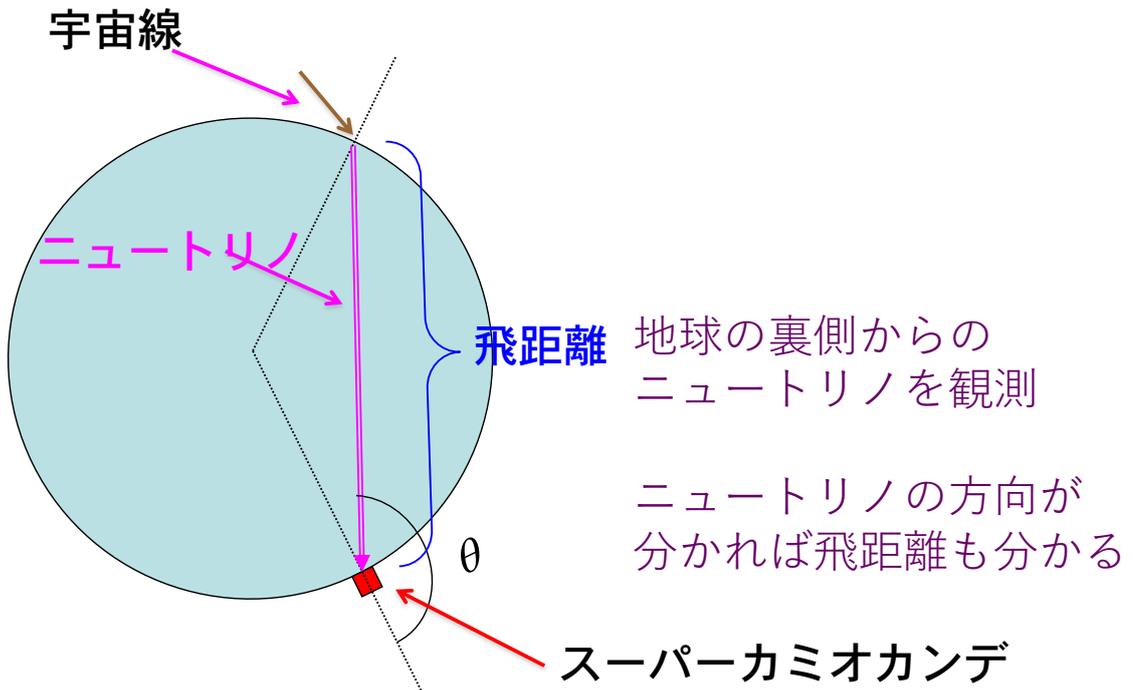
17

200107

素粒子I

34

# 解説：大気ニュートリノの飛距離の測定



200107

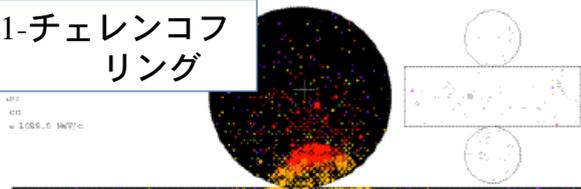
素粒子I

35

## スーパーカミオカンデ検出器による大気ニュートリノ信号の観測

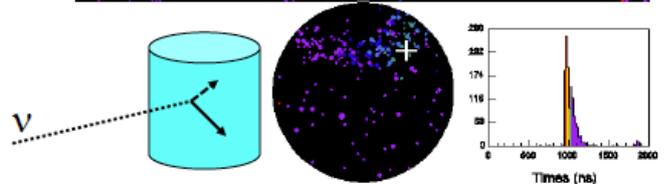
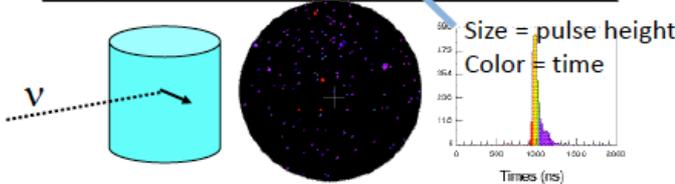
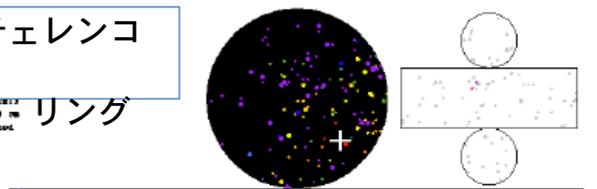
梶田先生のスライドの日本語訳

1-チェレンコフリング



多-チェレンコフリング

Time (ns)  
 \* 576  
 \* 576-581  
 \* 581-586  
 \* 586-591  
 \* 591-596  
 \* 596-601  
 \* 601-606  
 \* 606-611  
 \* 611-616  
 \* 616-621  
 \* 621-626  
 \* 626-631  
 \* 631-636  
 \* 636-641  
 \* 641-646  
 \* >646



Atmospheric Neutrino Oscillations

18

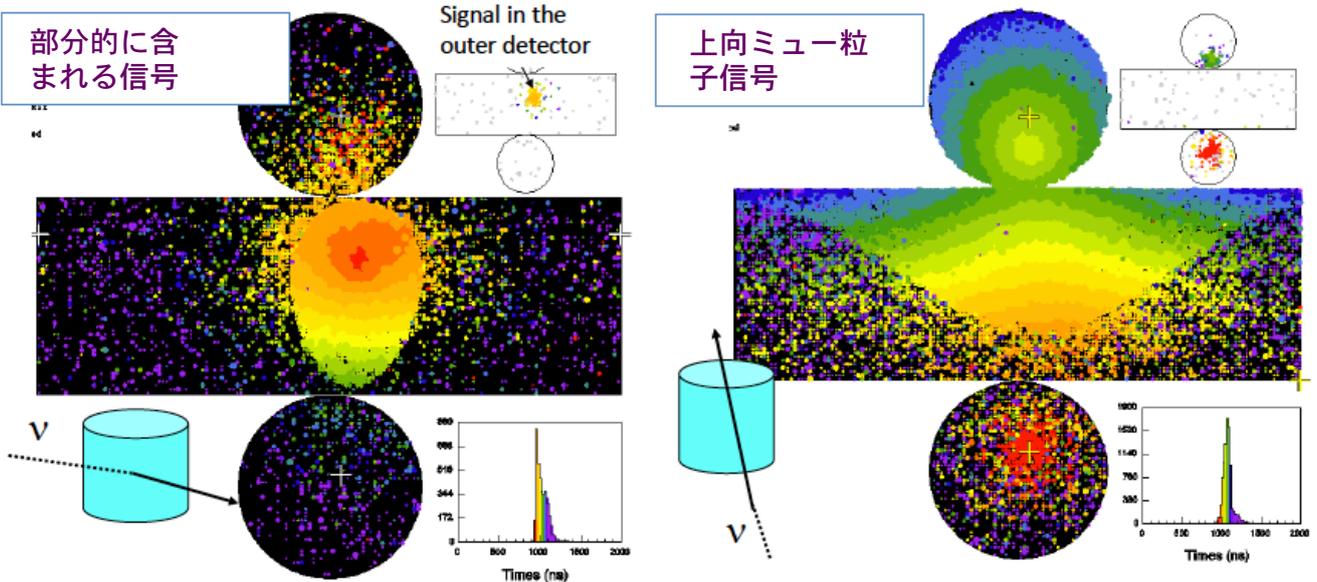
200107

素粒子I

36

スーパーカミオカンデ検出器による大気ニュートリノ信号の日本語訳

梶田先生のスライドの日本語訳



全てのデータが解析に利用された ← 多くの(若い)人たちの努力の結果です!

Atmospheric Neutrino Oscillations

19

200107

素粒子I

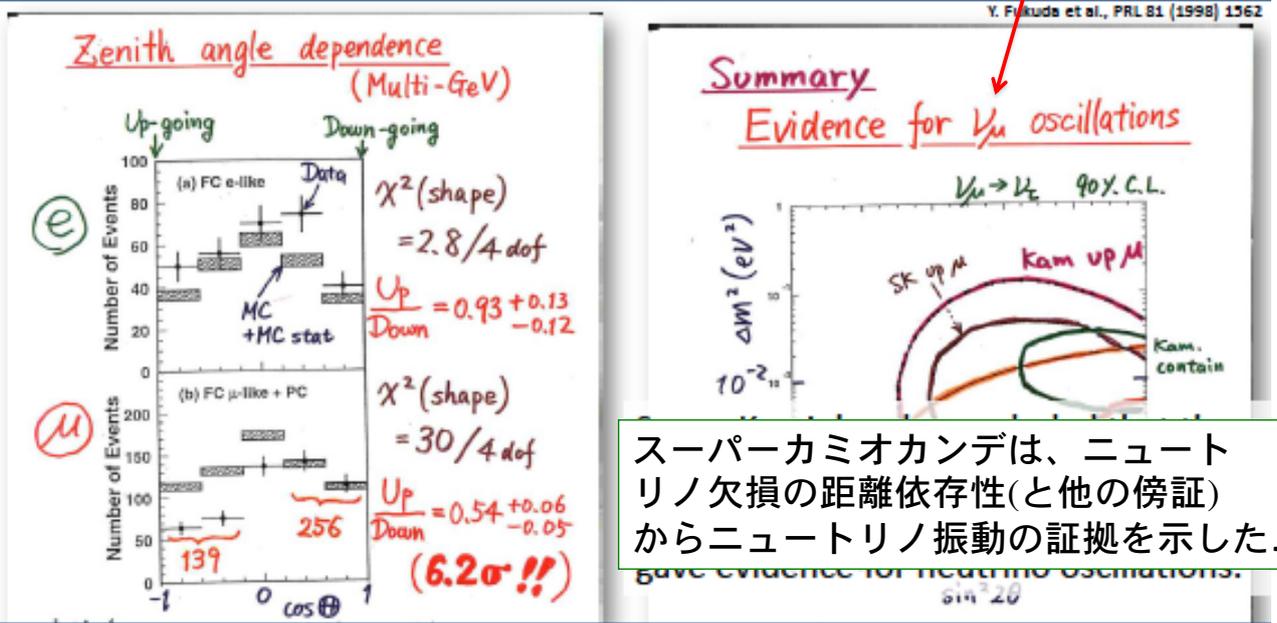
37

ノーベル賞の元となった歴史的なスライド

$\nu_\mu$ 振動の発見!!

ニュートリノ振動の証拠 (1998年ニュートリノ会議)

梶田先生のスライドの日本語訳



スーパーカミオカンデは、ニュートリノ欠損の距離依存性(と他の傍証)からニュートリノ振動の証拠を示した。

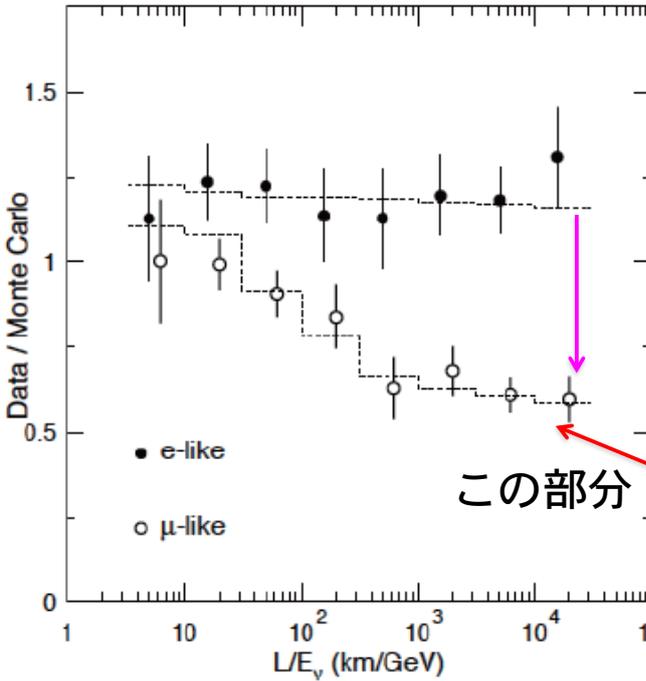
200107

素粒子I

38

# 解説

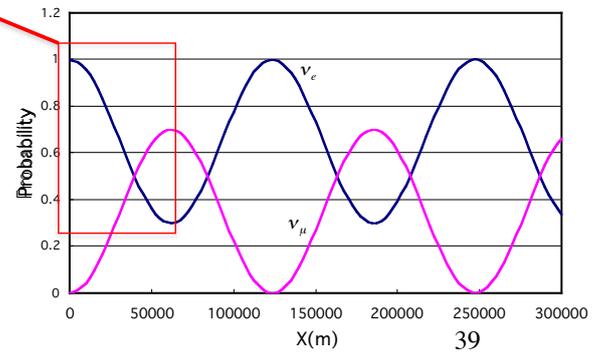
ニュートリノの数



距離

## ニュートリノの数

ミューニュートリノが  
減っている！！  
→ ニュートリノ振動の発見！  
→ ニュートリノの質量の発見！



200107

素粒子I

## もしニュートリノに質量があると…

- ニュートリノは宇宙で光(質量0)の次に多い素粒子なので 宇宙の重さがこれまで理解されていたより重いことになる。
- ニュートリノは、見えない質量であるダークマターかもしれない。
- 粒子-反粒子の対称性の破れが可能になり、今の宇宙に反粒子がないことを説明できるかもしれない、
- ニュートリノの質量は他の素粒子の質量に比べ圧倒的に小さい原因の研究が大統一理論のヒントを与えるかもしれない。

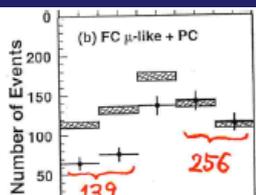
∴

など、いろいろな謎が解けるかもしれない。

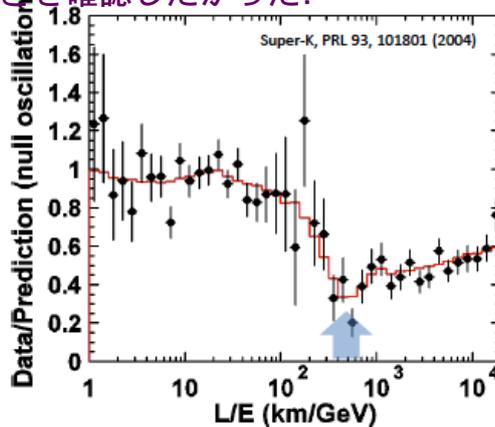
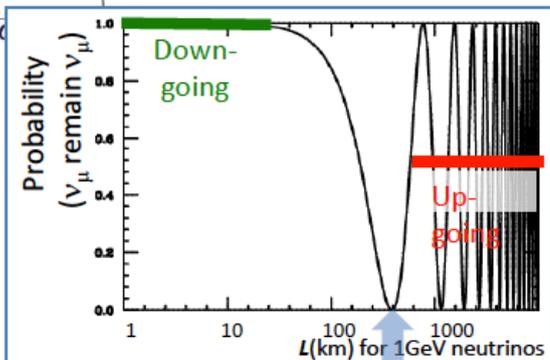
# 最近の結果と将来

## 「振動」の確認

梶田先生のスライドの日本語訳



長距離飛んできた $\nu_\mu$ が半分にあることを観測できたことは良かった。  
しかし、実際に「振動」していることを確認したかった。



「振動」を確認するために、この大きな凹みを確認したかった。

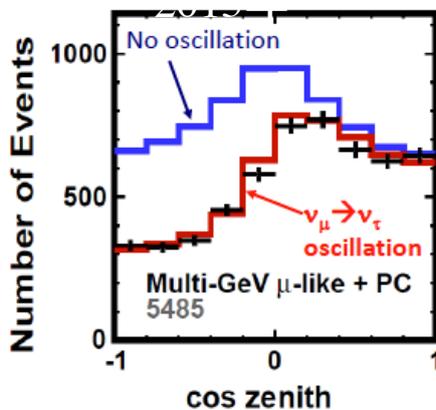
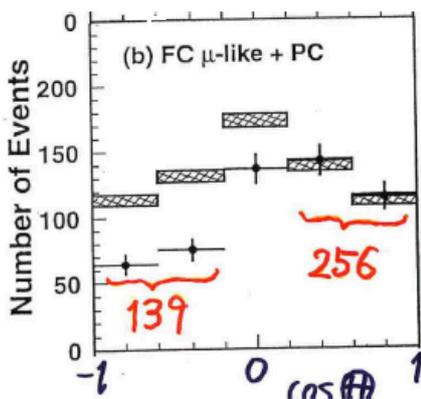
凹みが観測された。  
→ 本当に「振動」だった。(2004)

200107 解説：一度減ってまた増えることは、振動だけの性質

## 最新のデータとニュートリノ質量と混合角

梶田先生のスライドの日本語訳

1998



これらのデータは、次のことを示している。

1. 最も重いニュートリノの質量は、電子(ニュートリノ以外で一番軽い素粒子)の質量の10000000分の1より軽い。
2. 驚くべきことに、 $\nu_\mu$ は、殆ど $\nu_\tau$ に振動する。これが何故かを理解したい。

Number of events plotted:

531 events

5485 events

“Atmospheric  $\nu_\mu$  deficit” (around 1990)

“Discovery of neutrino oscillations” (1990's)

“Long-baseline neutrino oscillation experiments” (~2000's)

“3 flavor oscillations” (2010's)

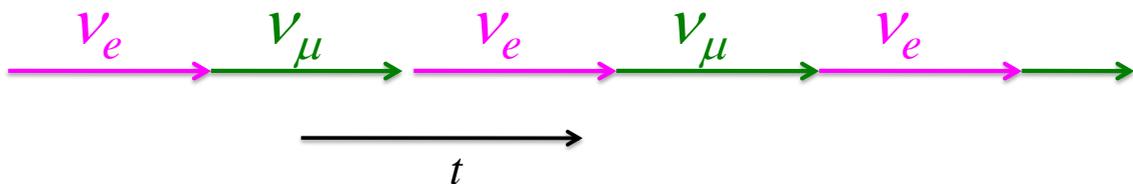
“future oscillation experiments” (2020's ?)

我々のニュートリノ振動の理解は、素晴らしく進んできている！ 今後もニュートリノをもっと良く理解しなければならない。

(These are not the complete list. Sorry... For the solar neutrino part, please see the presentation by Prof. Art McDonald.)

## ニュートリノ振動入門

現象としては、飛んでいる間に  $\nu_e$  が  $\nu_\mu$  に変化したり、 $\nu_\mu$  に戻ったりする。



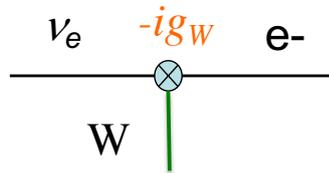
最初に  $\nu_e$  を作ったとして  $t$  秒後に  $\nu_\mu$  に変化している確率は、

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} t$$

で表される。ここで、 $m_2$  と  $m_1$  ニュートリノの質量。 $\theta$  は、混合角と呼ばれる。

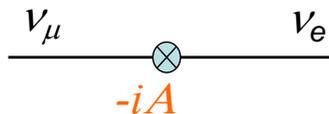
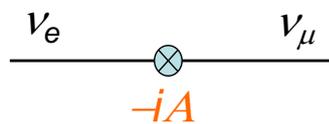
# ν振動

弱い相互作用は、ニュートリノを電子に変えた



同様に、 $\nu_e$ 、 $\nu_\mu$  間に次のような自発的な変化があるとする。

$$\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$$



最初純粋な、 $\nu_\mu$  状態だったする

$$\psi(t) = |\nu_\mu\rangle$$

$\delta t$  秒後、この遷移のために  $\nu_e$  が生まれる。

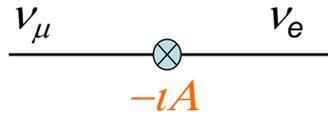
$$\psi(t + \delta t) \sim |\nu_\mu\rangle - iA\delta t |\nu_e\rangle$$

最初純粋な、 $\nu_e$  状態だったする

$$\psi(t) = |\nu_e\rangle$$

$\delta t$  秒後、この遷移のために  $\nu_\mu$  が生まれる。

$$\psi(t + \delta t) \sim |\nu_e\rangle - iA\delta t |\nu_\mu\rangle$$



最初  $v_\mu$  と  $v_e$  の重ね合わせ状態だった場合、

$$\psi(t) = C_\mu(t)|v_\mu\rangle + C_e(t)|v_e\rangle$$

$\delta t$ 秒後の状態は、

$$\psi(t + \delta t) \sim C_\mu(t)(|v_\mu\rangle - iA\delta t|v_e\rangle) + C_e(t)(|v_e\rangle - iA\delta t|v_\mu\rangle)$$

$|v_\mu\rangle$   $|v_e\rangle$  でまとめると、

$$\psi(t + \delta t) = \underbrace{(C_\mu(t) - iA\delta t C_e(t))}_{C_\mu(t + \delta t)} |v_\mu\rangle + \underbrace{(C_e(t) - iA\delta t C_\mu(t))}_{C_e(t + \delta t)} |v_e\rangle$$

200107

素粒子I

47

前ページから、

$$\begin{cases} C_\mu(t + \delta t) = C_\mu(t) - iAC_e(t)\delta t \\ C_e(t + \delta t) = C_e(t) - iAC_\mu(t)\delta t \end{cases}$$

これから

$$\begin{cases} \frac{C_\mu(t + \delta t) - C_\mu(t)}{\delta t} = -iAC_e(t) \\ \frac{C_e(t + \delta t) - C_e(t)}{\delta t} = -iAC_\mu(t) \end{cases} \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} \boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt} C_\mu(t) = -iAC_e(t) \\ \frac{d}{dt} C_e(t) = -iAC_\mu(t) \end{cases}}$$

これが振動の元になる微分方程式。  
これを解いて  $C_\mu(t)$ ,  $C_e(t)$  を求める

200107

素粒子I

48

## 振動の微分方程式を解く

2つの式を足し引き

$C_{\pm} = C_{\mu} \pm C_e$  と置く.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C_{\mu} = -iAC_e \\ \frac{d}{dt}C_e = -iAC_{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(C_{\mu} + C_e) = -iA(C_{\mu} + C_e) \\ \frac{d}{dt}(C_{\mu} - C_e) = iA(C_{\mu} - C_e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}C_+(t) = -iAC_+(t) \\ \frac{d}{dt}C_-(t) = iAC_-(t) \end{cases}$$

2つの式を足し引きして元に戻す.

解は、

$$\begin{cases} C_+(t) = B_+e^{-iAt} \\ C_-(t) = B_-e^{iAt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{\mu}(t) + C_e(t) = B_+e^{-iAt} \\ C_{\mu}(t) - C_e(t) = B_-e^{iAt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{\mu}(t) = \frac{B_+e^{-iAt} + B_-e^{iAt}}{2} \\ C_e(t) = \frac{B_+e^{-iAt} - B_-e^{iAt}}{2} \end{cases}$$

200107

素粒子I

これが最終解

49

結局任意の  $t$  での波動関数は、

$$\psi(t) = C_{\mu}(t)|v_{\mu}\rangle + C_e(t)|v_e\rangle = \frac{B_+e^{-iAt} + B_-e^{iAt}}{2}|v_{\mu}\rangle + \frac{B_+e^{-iAt} - B_-e^{iAt}}{2}|v_e\rangle$$

最初( $t=0$ )、純粋に  $|v_{\mu}\rangle$  だとすると、

$$\psi(0) = \frac{B_+ + B_-}{2}|v_{\mu}\rangle + \frac{B_+ - B_-}{2}|v_e\rangle = |v_{\mu}\rangle$$

より、 $B_+ = B_- = 1$  と決定される。この時、

$$\psi(t) = \frac{e^{-iAt} + e^{iAt}}{2}|v_{\mu}\rangle + \frac{e^{-iAt} - e^{iAt}}{2}|v_e\rangle = \cos At|v_{\mu}\rangle - i \sin At|v_e\rangle$$

200107

素粒子I

50

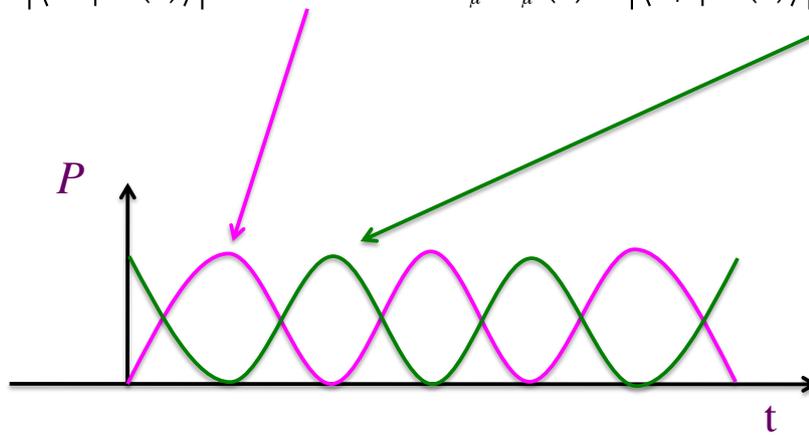
前ページから、

$$\psi(t) = \cos At |v_\mu\rangle - i \sin At |v_e\rangle$$

t秒後に  $v_e$  である確率

t秒後に  $v_\mu$  である確率

$$P_{v_\mu \rightarrow v_e}(t) = |\langle v_e | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2 At, \quad P_{v_\mu \rightarrow v_\mu}(t) = |\langle v_\mu | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2 At$$



これがニュートリノ振動!!

### 質量固有状態(決まった質量を持つ状態)

$$\psi(t) = \cos At |v_\mu\rangle - i \sin At |v_e\rangle = \frac{e^{-iAt} + e^{iAt}}{2} |v_\mu\rangle + \frac{e^{-iAt} - e^{iAt}}{2} |v_e\rangle$$

$e^{iAt}, e^{-iAt}$  でまとめると、

$$\psi(t) = \frac{1}{2} (|v_\mu\rangle + |v_e\rangle) e^{-iAt} + \frac{1}{2} (|v_\mu\rangle - |v_e\rangle) e^{iAt}$$

これから

$$|v_+\rangle = \frac{|v_\mu\rangle + |v_e\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{が質量} A \text{ をもつ質量固有状態} \quad \psi_+(t) = |v_+\rangle e^{-iAt}$$

$$|v_-\rangle = \frac{|v_\mu\rangle - |v_e\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{が質量} -A \text{ をもつ質量固有状態} \quad \psi_-(t) = |v_-\rangle e^{-i(-A)t}$$

## ニュートリノ振動測定の意義

結局  $\nu_\mu$   $\otimes$   $\nu_e$  の自発的変化があれば、  
 $-iA$

ニュートリノの種類が混合し、  
 質量固有状態になり、

$$\begin{pmatrix} |\nu_+\rangle \\ |\nu_-\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_e\rangle \end{pmatrix}$$

質量、 $\pm A$ が生まれ、

$$\psi_\pm(t) = |\nu_\pm\rangle e^{\mp iAt}$$

ニュートリノ振動が生まれる.

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(t) = \sin^2 At$$

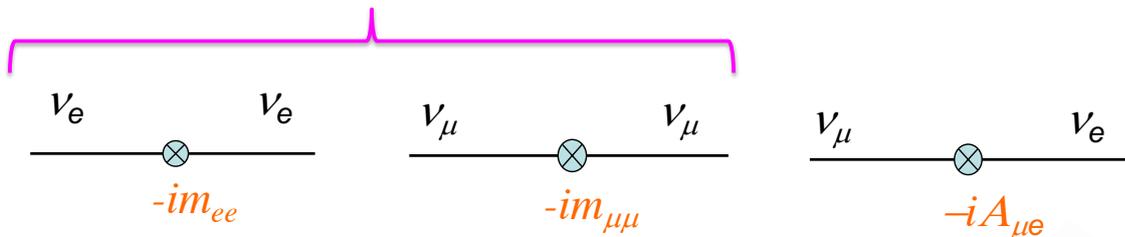
ニュートリノ振動の測定は、遷移の強さAを測定することになる。何がこの遷移を作っているかは現在謎であり、その原因を追求するために、ニュートリノ振動実験により、その大きさを測定することが重要。

200107

素粒子I

53

実際には、自分自身への遷移もある



この場合質量固有状態は、

$$\begin{pmatrix} |\nu_+\rangle \\ |\nu_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_e\rangle \end{pmatrix}$$

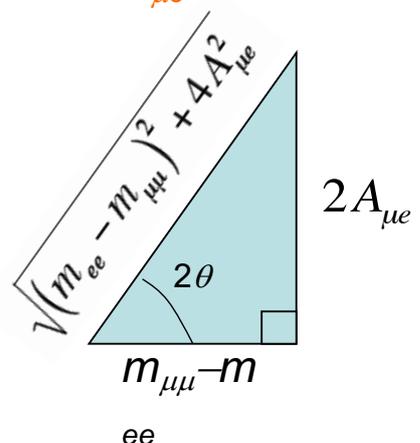
質量は、

$$m_\pm = \frac{m_{ee} + m_{\mu\mu}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_{ee} - m_{\mu\mu})^2 + 4A_{\mu e}^2}$$

振動確率は、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{m_+ - m_-}{2} t \right]$$

200107



54